Świat Matematyki,
Rozwiazanie zadania konkursowego

Aleksander Jakóbczyk,

POSZUKIWANIA PIERWSZYCH

Treść zadania

Znajdź wszystkie takie liczny naturalne n, dla których istnieją liczby pierwsze $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$ i liczba naturalna k oraz zachodzi równość:

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)=\frac{1}{k}. \tag{1}$$

Rozwiązanie

Łatwo zauważyć ze dla $n = 1$ i $n = 2$ nasze równanie zostaje spełnione:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},$$
$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Aby udowodnić, że dla $n \geqslant 3$ nasze równianie nie zachodź rozważmy najpierw poniższy przypadek:

$$\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\left(\frac{p_i-1}{p_i}\right)=\frac{\alpha}{p_i}$$

gdzie p_i jest dowolną liczbą pierwsza różną od 2.

Widać, że α jest liczbą parzystą. Zatem nasze równanie 1 możemy przedstawić w następującej postaci:

$$\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)=\frac{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}{p_1p_2\ldots p_n},$$

gdzie $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ są liczbami parzystymi.
Widzimy zatem, że licznik nigdy nie będzie podzielny przez mianownik złożony z samych licz nieparzystych.
Ostatecznie nasze równanie jest spełnione tylko dla $n = 1$ i $n = 2$. $\square$